

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un ev. de dim. finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications

[Bec] : *Objectif agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré

[Ber] : *Algèbre, le grand combat*, Grégory Berhuy

[Boy] : *Algèbre et géométries*, Pascal Boyer

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Algèbre*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier

[Per] : *Cous d'algèbre*, Daniel Perrin

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

[Tau] : *Géométrie*, Patrice Tauvel

I Partie A - Présentation du groupe linéaire

I.1 Définition et premières propriétés [Per] [Rom]

■ **Déf 1 (GL) :**

■ **Déf 2 (SL) :**

Rem 3 : Lien avec les matrices.

■ **Prop 4 (Structure de groupe) :**

I.2 Transvections et dilatations [Szp] [Per]

■ **Déf 5 (Dilatation) :**

■ **Ex 6 :** Inventer un exemple en conjugant une dilatation facile (donner l'hyperplan et la droite).

■ **Thm 7 (Critère pour dilatation) :**

■ **Déf 8 (Transvection) :**

■ **Ex 9 :** Inventer un exemple en conjugant une transvection facile (donner l'hyperplan).

■ **Thm 10 (Critère pour transvection) :**

■ **Prop 11 (Inverse d'une transvection) :**

■ **Thm 12 (Générateurs) :**

I.3 Sous-groupes particuliers [Rom] [Szp]

■ **Déf 13 ($SL(E)$) :**

■ **Prop 14 (Distingué et quotient de SL) :**

■ **Déf 15 (Centre) :**

■ **Prop 16 (Centre) :**

■ **Thm 17 (Burnside) :**

■ **Déf 18 (Groupe dérivé) :**

■ **Thm 19 (Groupe dérivé) :**

II Partie B - Matrices sur des corps finis

II.1 Dénombrement [Rom] [Ulm]

■ **Thm 20 (Cardinal) :**

■ **Ex 21 ($\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2)$) :**

■ **Prop 22 (Cardinal des groupes spéciaux) :**

■ **App 23 (Cardinal du cône nilpotent) :**

■ **Dév 24 (Probas sur $GL_2(F_q)$) :**

II.2 Point de vue permutation [Bec] [Ber]

■ **Déf 25 (Signature) :**

■ **Déf 26 (Symbole de Legendre) :**

■ **Dév 27 (Frobenius-Zolotarev) :**

■ **App 28 (Lois complémentaires) :**

■ **Dév 29 (Signature Frobenius) :**

III Partie C - De la géométrie !

III.1 Définitions

■ **Déf 30 (Isométrie vectorielle) :**

Rem 31 : Lien entre $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$.

■ **Prop 32 (Déterminant) :**

■ **Déf 33 (SO_n) :**

App 34 (Décomposition polaire) :

III.2 Générateurs [Szp] [Rom] [Per]

■ **Déf 35 (Réflexion, renversement) :**

■ **Ex 36 :** Réflexion et renversement matriciels en dim 3.

Thm 37 (Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$) :

■ **Prop 38 :** Les renversements sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.

App 39 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

III.3 En dimension deux et application aux pavages [Tau] [Szp] [Boy]

■ **Déf 40 (Rotations et symétries orthogonales) :**

■ **Ex 41 :** [Annexe : Rotations et symétries]

■ **Prop 42 (Structure de $O_2(\mathbb{R})$) :**

Rem 43 : $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

App 44 (Structure de $Is(\mathbb{R}^2)$) :

■ **Prop 45 (Sous-groupes de SO_2) :**

■ **Déf 46 (Pavage) :**

🐦 Dév 47 (Classification des pavages directs) :

IV Partie D - Et de la topologie !

IV.1 Fermeture, compacité et ouverture [Per] [Szp] [Cal-Per]

■ **Prop 48 (GL_n DO) :**

App 49 (Différentielle du det) :

■ **Prop 50 (SL_n fermé) :**

■ **Prop 51 ($O_n(\mathbb{R})$ compact) :**

App 52 (Décomposition polaire générale) :

IV.2 Connexité

Thm 53 (Cas de $\mathbb{C}$) :

Thm 54 (Cas de $\mathbb{R}$) :